Topologia
Lista 6

Zad 1. Niech $A \subset X$ i $B \subset Y$ będą podzbiorami przestrzeni topologicznych X, Y. Udowodnić, że w ioczynie kartezjańskim $X \times Y$ zachodzą wzory

$$\mathrm{Int}\,(A \times B) = \mathrm{Int}\,(A) \times \mathrm{Int}\,(B)$$

$$\mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B))$$

Zad 2. Dowieść, że na to, aby iloczyn kartezjański $A \times B$ był w sobie gęsty, potrzeba i wystarcza, żeby jeden ze zbiorów A lub B był w sobie gęsty.

Zad 3. Pokazać, że dla przestrzeni topologicznej X następujące warunki są równoważne:

a) przestrzeń X nie jest sumą dwu rozłącznych zbiorów otwartych,

b) jedynymi podzbiorami domknięto-otwartymi w X są $\emptyset$ i X,

c) jeśli $X = X_1 \cup X_2$ i zbiory X_1, X_2 są rozgraniczone, to znaczy

$$\overline{X}_1 \cap X_2 = \emptyset \quad \wedge \quad X_1 \cap \overline{X}_2 = \emptyset,$$

to jeden z nich jest pusty,

d) każde przekształcenie ciągłe $f : X \to D$ przestrzeni X w przestrzeń dyskretną D posiadającą conajmniej dwa elementy jest stałe.

Zad 4. Które z podanych przestrzeni są spójne:

a) przestrzeń dyskretna,

b) przestrzeń antydyskretna,

c) przestrzeń $(\mathbb{N}, \tau)$, gdzie $\tau = \{A \subset \mathbb{N} :\ \text{zbiór } \mathbb{N} \setminus A \text{ jest skończony lub } A = \emptyset\}$.

Zad 5. Wykazać, że przy odwzorowaniu ciągłym obraz zbioru spójnego jest zbiorem spójnym.

Zad 6. Udowodnić, że każda przestrzeń metryczna spójna jest jednoelementowa lub ma moc niemniejszą niż continuum.

Zad 7. Spójną oraz zwartą przestrzeń metryczną nazywa się *contiuum*. Udowodnić, że przekrój zstępującego ciągu continuów również jest continuum.